2. *Über die Begründung des Gesetzes der schwarzen Strahlung;*
von Max Planck.

(Im Auszug vorgelegt in der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Sitzung vom 12. Januar 1912.)

§ 1. Einleitung.

Die bisherige Ableitung der Formel für die Energieverteilung im Spektrum schwarzer Körper, welche ausgeht von der Betrachtung monochromatisch schwingender, strahlende Energie absorbierender und emittierender linearer Oszillatoren, leidet, wie schon mehrfach hervorgehoben wurde, an einem empfindlichen Mangel. Denn um die Abhängigkeit der Strahlungsintensität von der Temperatur festzustellen, wird so verfahren, daß die Energie der Oszillatoren einerseits in Beziehung gebracht wird mit der Intensität der im Raume frei fortschreitenden Wellenstrahlung, andererseits aber als Grundlage benutzt wird für die Berechnung der Entropie eines Systems von solchen Oszillatoren.

Die erstere Untersuchung ist rein elektrodynamischer Natur. Bei ihr wird die Schwingungsenergie eines Oszillators

$$U = \tfrac{1}{2} K f^2 + \tfrac{1}{2} L \left(\frac{d f}{d t}\right)^2 \tag{1}$$

(f elektrisches Moment des Oszillators, K und L positive Konstanten) als durchaus stetig veränderlich behandelt, und ihr Wert berechnet durch Integration der Schwingungsgleichung

$$K f + L \frac{d^2 f}{d t^2} - \frac{2}{3 c^3} \frac{d^3 f}{d t^3} = \mathfrak{E}_z \tag{2}$$

($\mathfrak{E}_z$ Komponente der elektrischen Feldstärke des äußeren Feldes in der Richtung der Achse des Oszillators, c die Lichtgeschwindigkeit).

Die zweite Untersuchung ist statistischer Natur. Bei ihr wird die Schwingungsenergie des Oszillators als ganzes Vielfaches eines Elementarquantums $\varepsilon = h\nu_0$, mithin als unstetig veränderlich, behandelt, wobei h eine universelle Konstante, ν_0 die Schwingungszahl der Eigenschwingung des Oszillators bedeutet:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{L}}. \tag{3}$$

Der Widerspruch der beiden Betrachtungsweisen ist evident, und wenn er auch etwas gemildert wird durch die Überlegung, daß die Gleichung (2) nur zur Berechnung der *mittleren* Energie $\bar{U}$ benutzt wird, während für die statistische Berechnung die wirkliche Energie U in bestimmten Zeitpunkten in Betracht kommt, so bleibt doch die Aufgabe übrig, eine anderweitige Ableitung der Strahlungsformel zu finden, bei der die elektrodynamische und die statistische Betrachtungsweise auch im einzelnen miteinander vereinbar sind.

Dieser Aufgabe ist der folgende Aufsatz gewidmet. In ihm wird das Strahlungsgesetz aus gewissen physikalischen Voraussetzungen abgeleitet, die zwar, wie es der Natur der Sache entspricht, gewisse hypothetische Elemente enthalten, die aber, wie ich glaube, von inneren Widersprüchen frei sind, und außerdem sich von dem Kern der klassischen Elektrodynamik und Elektronentheorie nicht weiter entfernen, als bei dessen anerkanntermaßen unüberbrückbaren Gegensatz zur Quantenhypothese durchaus notwendig ist.

Selbstverständlich bin ich nicht der Meinung, daß diese Ableitung die einzige oder daß sie die sachgemäßeste ist; ich halte es im Gegenteil für sehr wahrscheinlich, daß sie nach Form und Inhalt noch erheblich verbessert werden kann, aber es scheint mir doch schon ein wesentlicher Gewinn zu sein, daß überhaupt eine in sich widerspruchsfreie Ableitung sich angeben läßt, an der es bisher, streng genommen, fehlte.

§ 2. Physikalische Voraussetzungen.

Wir behalten aus der früheren Ableitung die Voraussetzung bei, daß in einem von stationärer schwarzer Strahlung erfüllten, von ruhenden spiegelnden Wänden begrenzten Vakuum sich ein System von vielen ruhenden linearen Oszillatoren mit einer bestimmten gemeinsamen Eigenperiode befindet, und zwar in solchen Entfernungen voneinander, daß sie sich gegenseitig nicht direkt beeinflussen. Diese Oszillatoren sollen Energie absorbieren und emittieren, aber nur in der Form von elektrodynamischer Wellenstrahlung. Die Schwingungsenergie eines Oszillators soll auch wieder durch (1) gegeben sein. Dagegen soll statt der Schwingungsgleichung (2) eine andere gelten, nämlich diejenige, welche aus ihr hervorgeht, wenn man das Dämpfungsglied einfach fortläßt:

$$K f + L \frac{d^2 f}{d t^2} = \mathfrak{E}_z . \tag{4}$$

Dies ist allerdings im Widerspruch mit der klassischen Elektronentheorie; aber der Widerspruch erstreckt sich, wie eine nähere Überlegung zeigt, nur auf solche Raumgebiete, die im Innern oder an der Oberfläche des Oszillators liegen[1]), und gerade in diesen Gebieten wird man neuen Hypothesen noch am ersten Platz gewähren können.

Nachdem so die gewöhnliche Emission ausgeschaltet ist, muß eine andere dafür eingeführt werden, und hierzu wird nun die Quantenhypothese benutzt. Wir setzen nämlich voraus, daß ein Oszillator nur in einem solchen Zeitpunkt Energie emittieren kann, in dem seine Schwingungsenergie U gerade ein ganzes Vielfaches n des Energieelementes $\varepsilon = h \nu_0$ geworden ist. Ob er dann wirklich emittiert, oder ob seine Schwingungsenergie noch weiter durch Absorption zunimmt, soll vom Zufall abhängen. Nicht als ob für die Emission keine Kausalität angenommen würde; aber die Vorgänge, welche die Emission kausal bedingen, sollen so verborgener Natur sein, daß ihre Gesetze einstweilen nicht anders als auf statistischem Wege zu ermitteln sind. Eine derartige Voraussetzung ist der Physik durchaus nicht fremd, sie wird ja z. B. gemacht in der atomistischen Theorie der chemischen Reaktionen, sowie in der Zerfallstheorie radioaktiver Substanzen.

Wenn aber Emission stattfindet, so soll stets die ganze Schwingungsenergie U emittiert werden, und somit die Schwin-

1) Natürlich darf das elektromagnetische Feld an der Oberfläche des Oszillators nicht als das quasistationäre Feld eines schwingenden Dipols angenommen werden.

gung des Oszillators auf Null herabsinken, um dann wieder durch neue Absorption von strahlender Energie anzuwachsen.

Es erübrigt jetzt noch die Fixierung des Gesetzes, welches die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß ein Oszillator in dem Augenblick, wo seine Energie ein ganzes Vielfaches von ε erreicht, die Emission vollzieht oder nicht. Denn von diesem Gesetz wird offenbar der statistische Gleichgewichtszustand abhängen, der sich bei dem angenommenen Wechselspiel von Absorption und Emission in dem System der Oszillatoren herausbildet; und zwar wird offenbar die mittlere Energie $\bar{U}$ der Oszillatoren um so größer sein, je größer die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß in einem solchen kritischen Augenblick *keine* Emission stattfindet. Da nun andererseits die mittlere Energie $\bar{U}$ um so größer sein wird, je größer die Intensität der die Oszillatoren umgebenden Hohlraumstrahlung ist, so setzen wir als Emissionsgesetz das Folgende fest: *Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit, daß keine Emission stattfindet, zu der Wahrscheinlichkeit, daß Emission stattfindet, ist proportional der Intensität der den Oszillator erregenden Schwingung.* (Wegen der Definition dieser Intensität vgl. unten Gleichung (17)). Den Wert der Proportionalitätskonstanten bestimmen wir nachher durch die Anwendung auf den speziellen Fall, daß die Strahlungsintensität sehr groß ist. Denn hierfür gelten, wie wir wissen, und zwar für jede beliebig angenommene Periode des Oszillators, die bekannten Formeln der klassischen Dynamik und das aus ihnen resultierende Rayleighsche Strahlungsgesetz.

Durch alle diese Festsetzungen, welche die von mir vor einiger Zeit aufgestellte Hypothese der „Quantenemission" näher präzisieren, ist der Ablauf der betrachteten Strahlungsvorgänge, die Eigenschaften des stationären Zustandes, die Entropie und Temperatur eines Systems von Oszillatoren, sowie die Energieverteilung im Spektrum der schwarzen Strahlung, vollständig bestimmt. Wir betrachten zuerst, im elektrodynamischen Teil, die Absorption, und dann, im statistischen Teil, die Emission und die stationäre Energieverteilung.

§ 3. Elektrodynamische Theorie.

Fassen wir einen Oszillator ins Auge, der soeben eine Emission vollzogen und demzufolge seine ganze Schwingungsenergie verloren hat. Wenn wir die Zeit t von diesem Augenblicke an zählen, so ist für $t = 0$ $f = 0$ und $df/dt = 0$. Dann erfolgt die Absorption nach Maßgabe der Gleichung (4). Wir schreiben $\mathfrak{E}_z$ in Form einer Fourierschen Reihe:

$$(5) \qquad \mathfrak{E}_z = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos \frac{2\pi n t}{\mathfrak{T}} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{\mathfrak{T}},$$

wobei $\mathfrak{T}$ ungeheuer groß gewählt sein soll, so daß alle betrachteten Zeiten $t < \mathfrak{T}$. Da wir stationäre Hohlraumstrahlung voraussetzen, so hängen die konstanten Koeffizienten A_n und B_n in unregelmäßiger Weise von den Ordnungszahlen n ab. Die Partialschwingung mit der Ordnungszahl n besitzt die Schwingungszahl ν und die Frequenz ω:

$$(6) \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi n}{\mathfrak{T}},$$

während die Schwingungszahl der Eigenperiode des Oszillators durch (3) gegeben ist.

Dann erhalten wir unter Berücksichtigung des Anfangszustandes als eindeutige Lösung der Differentialgleichung (4) den Ausdruck:

$$(7) \quad f = \sum_{1}^{\infty} \left[a_n (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) + b_n \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right],$$

wenn

$$(8) \qquad a_n = \frac{A_n}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad b_n = \frac{B_n}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Dies ist die Schwingung des Oszillators bis zu dem Augenblick, wo er die nächste Emission ausführt.

Die Koeffizienten a_n und b_n erreichen ihre größten Werte, wenn ω nahe gleich $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. (Der Fall $\omega = \omega_0$ ist unwesentlich; wir können ihn von vornherein ausschließen durch die Annahme, daß $\nu_0 \mathfrak{T}$ keine ganze Zahl ist.)

Berechnen wir nun die Energie, welche vom Oszillator in dem Zeitraum von $t = 0$ bis $t = \tau$, wobei

$$(9) \qquad \omega_0 \tau \text{ eine große Zahl}$$

sein soll, im ganzen absorbiert wird. Dieselbe wird nach den Gleichungen (1) und (4) gegeben durch das Integral:

$$\int_0^\tau \mathfrak{E}_z \frac{df}{dt}\, dt, \tag{10}$$

dessen Wert sich ergibt aus dem bekannten Ausdruck (5) von $\mathfrak{E}_z$ und aus:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{df}{dt} = \sum_1^\infty [a_n(&-\omega \sin \omega t + \omega_0 \sin \omega_0 t) \\ &+ b_n(\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega_0 t)]. \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Dies liefert für die absorbierte Energie, durch Ausführung der Multiplikation, Einsetzung der Werte von a_n und b_n aus (8) und Weglassung aller Glieder, die durch Multiplikation zweier verschiedener Konstanten A_n und B_n entstehen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}\int_0^\tau dt \sum_1^\infty \Big[& \frac{A_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t(-\omega \sin \omega t + \omega_0 \sin \omega_0 t) \\ & + \frac{B_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t(\omega \cos \omega t - \omega \cos \omega_0 t)\Big]. \end{aligned}$$

Hier läßt sich die Integration nach t Glied für Glied ausführen und ergibt nach Einsetzung der Grenzen τ und 0:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L}\sum_1^\infty \frac{A_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[-\frac{\sin^2 \omega \tau}{2} + \omega_0\left(\frac{\sin^2 \frac{\omega_0 + \omega}{2}\tau}{\omega_0 + \omega} + \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau}{\omega_0 - \omega}\right)\right] \\ + & \frac{1}{L}\sum_1^\infty \frac{B_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\left[\frac{\sin^2 \omega \tau}{2} - \omega\left(\frac{\sin^2 \frac{\omega_0 + \omega}{2}\tau}{\omega_0 + \omega} - \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau}{\omega_0 - \omega}\right)\right]. \end{aligned}$$

Um die Glieder verschiedener Größenordnung zu trennen, ist dieser Ausdruck so umzuformen, daß in allen Gliedern der Summe die Differenz $\omega_0 - \omega$ vorkommt. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L}\sum_1^\infty \frac{A_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\Big[\frac{\omega_0 - \omega}{2(\omega_0 + \omega)}\sin^2 \omega\tau + \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega}\sin\frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau \\ & \qquad \cdot \sin\frac{\omega_0 + 3\omega}{2}\tau + \frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega}\sin^2\frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau\Big] \\ + & \frac{1}{L}\sum_1^\infty \frac{B_n^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\Big[\frac{\omega_0 - \omega}{2(\omega_0 + \omega)}\sin^2 \omega\tau - \frac{\omega}{\omega_0 + \omega}\sin\frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau \\ & \qquad \cdot \sin\frac{\omega_0 + 3\omega}{2}\tau + \frac{\omega}{\omega_0 - \omega}\sin^2\frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau\Big]. \end{aligned}$$

Jetzt kann die Summation über die Ordnungszahlen n der Fourierschen Reihe vorgenommen werden. Da die Grundperiode $\mathfrak{T}$ der Reihe ungeheuer groß ist, so entspricht der Differenz zweier aufeinanderfolgender Ordnungszahlen: $\Delta n = 1$ eine sehr kleine Differenz der entsprechenden Frequenzen: $d\omega$, nämlich nach (6):

$$\Delta n = 1 = \mathfrak{T}\, d\nu = \frac{\mathfrak{T}\, d\omega}{2\pi}, \tag{12}$$

und die Summe über n verwandelt sich in ein Integral über ω.

Die aus den A_n gebildete Summenreihe enthält drei Glieder, deren Größenordnungen wir zunächst vergleichen wollen. Solange es sich nur um die Größenordnung handelt, können wir von der Veränderlichkeit der A_n^2 absehen und haben nur die drei Integrale zu vergleichen:

$$\int_0^\infty d\omega \cdot \frac{\sin^2 \omega\tau}{2(\omega_0 + \omega)^2} = J_1,$$

$$\int_0^\infty d\omega \cdot \frac{\omega_0}{(\omega_0 + \omega)^2(\omega_0 - \omega)} \sin\frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau \cdot \sin\frac{\omega_0 + 3\omega}{2}\tau = J_2$$

und

$$\int_0^\infty d\omega \cdot \frac{\omega_0}{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)^2} \sin^2\frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau = J_3.$$

Die Berechnung dieser Integrale vereinfacht sich dadurch erheblich, daß nach (9) $\omega_0\tau$ und folglich auch $\omega\tau$, wenigstens für alle in Betracht kommenden Werte von ω, große Zahlen sind. Daher kann man in dem Integral J_1 den Ausdruck $\sin^2\omega\tau$ durch seinen Mittelwert $^1/_2$ ersetzen und erhält:

$$J_1 = \frac{1}{4\omega_0}.$$

Für das zweite Integral J_2 erhält man wegen des letzten Faktors, wie leicht ersichtlich:

$$J_2 = 0.$$

Zur Berechnung des dritten Integrals J_3 endlich wollen wir in der Wertenreihe der Frequenzen ω zu beiden Seiten von ω_0

ein Intervall abgrenzen, welches von $\omega_1 < \omega_0$ bis $\omega_2 > \omega_0$ reicht, so daß:

(13) $$\frac{\omega_0 - \omega_1}{\omega_0} \quad \text{und} \quad \frac{\omega_2 - \omega_0}{\omega_0} \text{ kleine Zahlen}$$

und zugleich

(14) $$(\omega_0 - \omega_1)\tau \quad \text{und} \quad (\omega_2 - \omega_0)\tau \text{ große Zahlen}$$

sind. Dies ist deshalb möglich, weil $\omega_0 \tau$ groß ist. Zerlegt man nun das Integral J_3 in drei Teile, nach dem Schema:

$$J_3 = \int_0^\infty = \int_0^{\omega_1} + \int_{\omega_1}^{\omega_2} + \int_{\omega_2}^\infty,$$

so erkennt man, daß in dem ersten und in dem dritten Teilintegral wegen der Bedingung (14) der Ausdruck $\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau$ durch seinen Mittelwert $1/2$ ersetzt werden kann, wodurch die beiden Teilintegrale übergehen in:

(15) $$\int_0^{\omega_1} \frac{\omega_0\, d\omega}{2(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)^2} \quad \text{und} \quad \int_{\omega_2}^\infty \frac{\omega_0\, d\omega}{2(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)^2}.$$

Dieselben sind jedenfalls *kleiner* als die Integrale:

$$\int_0^{\omega_1} \frac{d\omega}{2(\omega_0 - \omega)^2} \quad \text{und} \quad \int_{\omega_2}^\infty \frac{d\omega}{2(\omega_0 - \omega)^2},$$

welche bzw. die Werte besitzen:

(16) $$\frac{1}{2} \frac{\omega_1}{\omega_0(\omega_0 - \omega_1)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2(\omega_2 - \omega_0)}.$$

Es bleibt noch das mittlere Teilintegral von J_3 zu betrachten:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \cdot \frac{\omega_0}{(\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega)^2} \cdot \sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2} \tau.$$

Wegen der Bedingung (13) kann man hierfür schreiben:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \cdot \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 - \omega}{2}\tau}{2(\omega_0 - \omega)^2},$$

und mit Einführung der Integrationsvariablen x:

$$x = \frac{\omega - \omega_0}{2}\tau$$

unter Berücksichtigung der Bedingung (14) für die Grenzen des Integrals:

$$\frac{\tau}{4} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cdot dx}{x^2} = \frac{\tau}{4} \cdot \pi .$$

Dieser Ausdruck ist von höherer Größenordnung sowohl gegenüber den Ausdrücken (16), als auch a fortiori gegenüber den beiden Teilintegralen (15) und den beiden obigen Integralen J_1 und J_2. Da somit für unsere Berechnung nur solche Frequenzen ω merklich in Betracht kommen, die in dem Intervall zwischen ω_1 und ω_2 liegen, so können wir wegen (13) in dem Ausdruck der gesamten absorbierten Energie die Einzelkoeffizienten A_n^2 und B_n^2 ersetzen durch ihre Mittelwerte A_0^2 und B_0^2 in der Nähe von ω_0, und erhalten schließlich unter Berücksichtigung von (12) als Gesamtbetrag der von dem Oszillator in der Zeit τ absorbierten Energie:

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{\tau}{8} (A_0^2 + B_0^2) . \mathfrak{T} .$$

Definieren wir nun die „Intensität der den Oszillator erregenden Schwingung“ $\mathfrak{J}_0$ durch die spektrale Zerlegung des Mittelwertes des Quadrates der erregenden Feldstärke $\mathfrak{E}_z$:

$$\overline{\mathfrak{E}_z^2} = \int_0^\infty \mathfrak{J}_\nu \, d\nu , \tag{17}$$

so ergibt sich nach (5) und (12):

$$\overline{\mathfrak{E}_z^2} = \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty (A_n^2 + B_n^2) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty (A_n^2 + B_n^2) . \mathfrak{T} \, d\nu,$$

und durch Vergleichung mit (17):

$$\mathfrak{J}_0 = \tfrac{1}{2} (A_0^2 + B_0^2) \mathfrak{T} .$$

Folglich die in der Zeit τ absorbierte Energie:

$$\frac{\mathfrak{J}_0}{4L} \cdot \tau ;$$

d. h. in der Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Emissionen wächst die Energie U des Oszillators gleichmäßig mit der Zeit, und zwar nach dem Gesetz:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\mathfrak{J}_0}{4L} . \tag{18}$$

§ 4. Statistische Theorie.

Jedesmal, wenn die Schwingungsenergie U des Oszillators ein Vielfaches n des Elementarquantums $\varepsilon = h\nu$ wird (den Index 0 lassen wir von jetzt an fort), findet möglicherweise Emission der gesamten Energie U statt, und zwar sei die Wahrscheinlichkeit hierfür mit η bezeichnet. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß keine Emission stattfindet, $1-\eta$. Nun soll nach dem im § 2 angenommenen Emissionsgesetz das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit, daß keine Emission stattfindet, zu der Wahrscheinlichkeit, daß Emission stattfindet, proportional sein der Intensität $\mathfrak{J}$ der den Oszillator erregenden Schwingung, also

$$\frac{1-\eta}{\eta} = p \cdot \mathfrak{J}, \tag{19}$$

wobei der Wert des Proportionalitätsfaktors p einer besonderen Berechnung vorbehalten bleibt. Dann ergibt sich die mittlere Energie $\bar{U}$ eines Oszillators im stationären Strahlungsfelde folgendermaßen.

Unter N Oszillatoren, die eine Emission vollzogen haben, emittieren

$N\eta$ beim Erreichen des ersten Energiequantums,
$N(1-\eta)\eta$ „ „ „ zweiten „
. . . .
$N(1-\eta)^{n-1}\eta$ „ „ „ n^{ten} „

Daher besitzen im stationären Strahlungsfelde von N gleichzeitig beliebig herausgegriffenen Oszillatoren

$N\eta = NP_0$ eine Energie zwischen 0 und ε,
$N(1-\eta)\eta = NP_1$ „ „ „ ε „ 2ε,
. . . .
$N(1-\eta)^{n-1}\eta = NP_{n-1}$ „ „ „ $(n-1)\varepsilon$ und $n\varepsilon$.

Dabei bedeutet P_n die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Energie eines Oszillators zwischen $n\varepsilon$ und $(n+1)\varepsilon$ liegt:

$$P_n = (1-\eta)^n \cdot \eta \,. \tag{20}$$

Dann ergibt sich die mittlere Energie $\bar{U}$ eines Oszillators durch die Gleichung:

$$\bar{U} = \sum_0^\infty P_n (n + \tfrac{1}{2})\,\varepsilon = \left(\frac{1}{\eta} - \tfrac{1}{2}\right)\varepsilon, \tag{21}$$

und aus (19) ihre Abhängigkeit von der Intensität $\mathfrak{J}$ der erregenden Schwingung:

$$\bar{U} = (p\,\mathfrak{J} + \tfrac{1}{2})\,\varepsilon. \tag{22}$$

Diese Beziehung benutzen wir zunächst, um die Proportionalitätskonstante p zu bestimmen.

Wie am Schluß des § 2 festgesetzt, haben wir dabei den Satz zugrunde zu legen, daß für große Werte der erregenden Schwingung $\mathfrak{J}$ die mittlere Energie des Oszillators $\bar{U}$ übergeht in den von der klassischen Elektrodynamik geforderten Wert[1]:

$$\bar{U} = \frac{3\,c^3}{32\,\pi^2\,\nu^2}\,\mathfrak{J}.$$

Daraus folgt sogleich:

$$p = \frac{3\,c^3}{32\,\pi^2\,\nu^2\,\varepsilon} = \frac{3\,c^3}{32\,\pi^2\,h\,\nu^3}. \tag{23}$$

Hierdurch ist sowohl die mittlere Energie $\bar{U}$ als auch, da nach (19)

$$\frac{1}{\eta} = 1 + p\,\mathfrak{J}, \tag{24}$$

die Verteilung der Energie auf ein System von N gleichartigen Oszillatoren im stationären Strahlungszustand bei gegebener Strahlungsintensität eindeutig bestimmt. Wir können also die Entropie und die Temperatur des Systems in bekannter Weise berechnen.

Zunächst ergibt sich für die Entropie des Systems[2])

$$S_N = -\,k\,N\,.\sum_0^\infty P_n\,.\ln P_n$$

und nach (20)

$$S_N = -\,k\,N\left(\ln\eta + \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\ln\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\right),$$

---

1) M. Planck, Verhandl. d. Deutsch. Phys. Ges. v. 3. Febr. 1911, Gleichung (4).

2) M. Planck, Berliner Ber. v. 13. Juli 1911, Gleichung (23).

oder mit Berücksichtigung von (24) und (22):

$$S_N = k\,N\cdot\left[\left(\frac{\bar U}{\varepsilon}+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\ln\left(\frac{\bar U}{\varepsilon}+\tfrac{1}{2}\right)-\left(\frac{\bar U}{\varepsilon}-\tfrac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{\bar U}{\varepsilon}-\tfrac{1}{2}\right)\right]=N\cdot S.$$

Sodann folgt für die Temperatur

$$\frac{1}{T}=\frac{d\,S}{d\,\bar U}=\frac{k}{\varepsilon}\ln\frac{\frac{\bar U}{\varepsilon}+\frac{1}{2}}{\frac{\bar U}{\varepsilon}-\frac{1}{2}},$$

oder, da $\varepsilon = h\,\nu$:

$$\bar U = \frac{h\,\nu}{2}\cdot\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}+1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}. \tag{25}$$

Endlich, aus (22) und (23), die spektrale Schwingungsintensität der schwarzen Strahlung:

$$\mathfrak{J} = \frac{32\,\pi^2 h\,\nu^3}{3\,c^3}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}, \tag{26}$$

welche mit der räumlichen Strahlungsdichte $\mathfrak{u}$ der nämlichen Schwingungszahl durch die Beziehung:

$$\mathfrak{J} = \frac{4\,\pi\,\mathfrak{u}}{3} \tag{27}$$

und mit der spezifischen Intensität eines monochromatischen geradlinig polarisierten Strahles $\mathfrak{K}$ durch die Beziehung

$$\mathfrak{J} = \frac{32\,\pi^2\,\mathfrak{K}}{3\,c}$$

zusammenhängt.

Für $T = 0$ wird $\mathfrak{J} = 0$ und $\mathfrak{u} = 0$, aber $\bar U = h\nu/2$. Dieser von der Temperatur unabhängige Energierest gehört also zur „latenten" Energie[1]), welche nicht zur Wärmekapazität, wohl aber zur trägen (und ponderablen) Masse beiträgt und auch die Quelle der radioaktiven Wirkungen bildet.

§ 5. Emissionszahl. Akkumulationszeit.

Die vorstehende Ableitung der Strahlungsformel ist zwar eindeutig und in sich widerspruchsfrei, aber die darin be-

1) M. Planck, Berliner Ber. v. 13. Juni 1907, p. 567; Ann. d. Phys. **26.** p. 30. 1908.

handelten physikalischen Vorgänge sind in der Natur günstigstenfalls nur in gewisser Annäherung anzutreffen. Zur näheren Untersuchung der bestehenden Abweichungen empfiehlt es sich, die physikalischen Eigenschaften des hier angenommenen idealen Oszillators weiter ins einzelne zu verfolgen und, soweit es möglich ist, mit Beobachtungsergebnissen in Beziehung zu bringen. Dahin gehört die Berechnung der Anzahl der stattfindenden Emissionen, ferner der Akkumulationszeit, d. h. der Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Emissionen eines Oszillators verstreicht.

Bezeichnen wir mit τ_1 die Zeit, welche ein Oszillator gebraucht, um aus der ihn allseitig umgebenden schwarzen Strahlung ein Energieelement aufzunehmen, so ist nach (18)

$$\tau_1 = \frac{4 L h \nu}{\mathfrak{J}} \,. \tag{28}$$

Nun hat offenbar in einem System von N stationär bestrahlten Oszillatoren während der Zeit τ_1 jeder Oszillator gerade einmal Gelegenheit, eine Emission auszuführen, und zwar ist hierfür die Wahrscheinlichkeit gleich η. Dies ergibt als *Emissionszahl pro Zeiteinheit* den Wert:

$$\frac{N \cdot \eta}{\tau_1} = \frac{8 \pi^2 \nu^2}{3 c^3 L} \cdot e^{-\frac{h \nu}{k T}} \cdot N \,. \tag{29}$$

Die Emissionszahl wächst also, wie zu erwarten, mit steigender Temperatur, doch nicht unbegrenzt, sondern nur bis zu einem bestimmten Maximum, welches von der Schwingungszahl abhängt. Daraus ergibt sich durch eine einfache Überlegung auch die *mittlere Akkumulationszeit*, d. h. die Zeit, welche im Mittel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Emissionen eines Oszillators verstreicht:

$$\frac{3 c^3 L}{8 \pi^2 \nu^2} \cdot e^{\frac{h \nu}{k T}} \,, \tag{30}$$

und die Anzahl der Schwingungen, die ein Oszillator im Mittel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Emissionen ausführt:

$$\frac{3 c^3 L}{8 \pi^2 \nu} \cdot e^{\frac{h \nu}{k T}} \,. \tag{31}$$

Um eine Vorstellung von der Größe dieser Zahlen zu bekommen, nehmen wir an, daß die Schwingung eines Oszillators in der Bewegung eines Elektrons von der Ladung e und der Masse m besteht. Dann ist nach den Gleichungen (1) und (2)

$$L = \frac{m}{e^2} \,. \tag{32}$$

Setzt man noch $\nu = c/\lambda$ und benutzt für e/m den neuesten Wert von Bestelmeyer[1]):

$$\frac{e}{m} = 1{,}77 \,.\, 10^7 \,.\, c \,,$$

ferner:

$$e = 4{,}69 \,.\, 10^{-10}, \quad c = 3 \,.\, 10^{10},$$

$$k = 1{,}35 \,.\, 10^{-16}, \quad h = 6{,}55 \,.\, 10^{-27},$$

so ergibt sich aus (31) für die *mittlere Zahl der ungestörten Schwingungen*:

$$1{,}37 \,.\, 10^{11} \,.\, \lambda \,.\, e^{\frac{1{,}46}{\lambda T}} \,.$$

Mißt man λ nicht in cm, sondern in μ, so wird daraus:

$$1{,}37 \,.\, 10^{7} \,.\, \lambda \,.\, e^{\frac{14600}{\lambda T}} \,. \tag{33}$$

Nach der hier behandelten Hypothese muß diese Zahl sehr groß sein, weil sonst der Absorptionsgleichung (18) ihre Grundlage entzogen würde. Das ist nun auch in der Tat unter gewöhnlichen Umständen der Fall. Nur wenn die Temperatur T größer wird als 10^{11}, und zugleich die Wellenlänge λ kleiner als $10^{-6}\,\mu$, würde die Zahl der ungestörten Schwingungen von mittlerer Größenordnung werden können und daher in den angestellten Betrachtungen eine Modifikation eintreten müssen.

Für die Emissionszahl eines Oszillators pro Sek. ergibt sich nach (29) in denselben Einheiten:

$$\frac{2{,}18 \cdot 10^7}{\lambda^2} \,.\, e^{-\frac{14600}{\lambda T}} \,, \tag{34}$$

und für die mittlere Akkumulationszeit nach (30):

$$4{,}58 \,.\, 10^{-8} \,.\, \lambda^2 \,.\, e^{\frac{14600}{\lambda T}} \,. \tag{35}$$

Über die näheren Einzelheiten beim Vorgang der Emission, namentlich über die Zahl der emittierten Wellenlängen, sagt

1) A. Bestelmeyer, Ann. d. Phys. **35.** p. 928. 1911.

die hier behandelte Hypothese nichts aus. Es erscheint naheliegend, dieselbe dahin zu erweitern, daß jede Emission mit der Abgabe oder Aufnahme eines Elektrons verbunden ist. Dies würde natürlich die Einführung einer neuen Energieform: der Energie des freien Elektrons, und daher auch eine neue Betrachtungsweise nötig machen.

Ein anderer Umstand, der beim Vergleich des hier behandelten idealen Falles mit den wirklichen Vorgängen zu berücksichtigen wäre, ist der, daß in Wirklichkeit die Oszillatoren weder linear noch unabhängig voneinander schwingen, sondern sich in unmittelbarer Nachbarschaft gegenseitig stark beeinflussen werden.

Dies sind wohl die hauptsächlichsten Richtungen, nach denen ein weiterer Ausbau der Theorie erfolgen müßte. Die dazu nötigen Anhaltspunkte können natürlich nur aus den Erfahrungen an nicht stationären oder selektiven Vorgängen (Linienspektra, Röntgenstrahlen, Elektronen- und Ionenstrahlen usw.) gewonnen werden. Andeutungen für einen Zusammenhang des universellen Wirkungsquantums h mit anderen Atomkonstanten liegen ja bereits mehrfach vor.

Berlin, Dezember 1911.

(Eingegangen 14. Januar 1912.)